Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ

Clasa a VIII-a

Etapa I

Timp de lucru: 120 de minute.
Fiecare problemă se punctează cu 4 puncte.Se acordă 20 de puncte din oficiu.

1. Dacă $x \in [-3,5]$ atunci valoarea expresiei $E(x) = |5-x| + |3+x|$ este:

a) -2 b) 0 c) 8 d) 10

2. Numărul planelor determinate de cinci puncte, oricare patru dintre acestea fiind necoplanare este:

a) 5 b) 8 c) 10 d) 30

3. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încât $(x+y-3)^2 + \sqrt{z-y-x} + |z-x-2| = 0.$ Triunghiul ale cărui unghiuri au măsurile direct proporționale cu numerele x, y și z este:

a) isoscel b) ascuțitunghic c) dreptunghic d) obtuzunghic

4.Fie ABCA'B'C' o prismă triunghiulară regulată dreaptă pentru care unghiul dintre drepetele AB' si BC' are masura de 60° , atunci valoarea tangentei unghiului dintre dreapta A'B şi planul (ABC) este:

a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 1

5.Se consideră expresia $E(x) = \left(x\sqrt{3}+1\right)^2 - \left(x\sqrt{3}+1\right)\left(x\sqrt{3}+3\right) + 2\left(x\sqrt{3}+7\right) - 9.$

Numărul $E(2021)$ este egal cu:

a) $\sqrt{2021}$ b) 100 c) 3 d) 2021

6. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a şi O' $centrul\ fetei$ $A'B'C'D'$. Măsura unghiului dintre dreptele AO' și BD este:

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90°

7.Dacă *m* este valoarea minimă a expresiei E(x)=x^2+6x+14, iar această valoare minimă se obține pentru valoarea *a* pe care o ia x, atunci *a*+*m* este:

a) 2 b) 7 c) 3 d) -1

8. Fie tringhiul ΔABC echilateral și S un punct exterior planului (ABC) astfel încât $[SA] \equiv [SB] \equiv [SC]$. $Dacă\ M este$ mijlocul lui $[BC]$ și măsura unghiului format de $dreptele\ AC$ și SM este de 60°. atunci, măsura unghiului dintre SA și SM este:

a)90° b) 60° c) 45° d) 30°

9.Dacă $x \in \mathbf{R}^*$ astfel încât $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 11$ atunci $\left|x - \dfrac{1}{x}\right|$ are valoarea:

a) 13 b) 3 c) 121 d) 9

10. Dacă (x_0, y_0, z_0) este soluția ecuației $2x^2+5y^2+z^2-6x+15y-z+16=0$ atunci $x_0+y_0+z_0$ este egal cu:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 1 d) 2

11. Suma valorilor întregi ale numărului a pentru care fracţia $\frac{2a+6}{a^2+4a+3}$ reprezintă un număr întreg este:

a) -4 b) -3 c) -1 d) -2

12.Dacă perechea de numere reale pozitive (a,b) reprezintă soluția sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} 3\sqrt{x}-2\sqrt{y}=8 \\ \frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\sqrt{y}}{5}=4 \end{cases}$$

, atunci a+b este:

a) 36 b) 25 c) 11 d) 61

13. Suma tuturor muchiilor unui cub ALGEBRIC este egală cu $48\sqrt{2}$ cm. Aria triunghiului AGC este egală cu:

a) $16\sqrt{3}\ cm^2$ b) 32 cm^2 c) 16 cm^2 d) $32\sqrt{2}\ cm^2$

14.Într-o prismă patrulateră regulată, lungimea laturii bazei şi lungimea înălţimii sunt direct proporţionale cu 3 şi 4, iar diagonala unei feţe laterale este de 10 cm. Atunci suma ariilor fețelor laterale ale prismei este:

a) 36 cm^2 b) 192 cm^2 c) 432 cm^2 d) 156 cm^2.

15.Într-un cub ABCDA'B'C'D' măsura unghiului dintre dreptele A'C' şi AD' este de a°, iar unghiul dintre planele (BC'A) si (DCC') are măsura de b°. Atunci a+b este:

a) 90 b) 180 c) 120 d) 105

16. Triunghiul echilateral ABC are vârful A conținut într-un plan α. Unghiurile pe care le formează AB și AC cu planul α sunt de 45°. Atunci sinusul unghiului format de planele (ABC) și α este:

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

17. Pe planul trapezului isoscel ABCD cu AB||CD, AB>CD, AB=12cm, $m(\sphericalangle A)=45°$, se ridică perpendiculara MB, MB=6cm. Atunci distanța de la M la AD este:

a)6 cm b) $6\sqrt{2}$ cm c) $6\sqrt{3}$ cm d) $12\sqrt{6}$ cm

18.Se consideră numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n, n \in \mathbb{N}^*, n > 43$astfel încât $x_1+x_2+\ldots+x_n=2021$ și $|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=\ldots=|x_{n-1}-x_n|=|x_n-x_1|$. Atunci cel mai mic număr n este egal cu:

a)47 b) 101 c) 111 d) 1011

19. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$ numere reale pozitive cu suma 1. Dacă $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots\frac{x_{2020}}{x_{2021}}=\frac{1}{2}$, atunci x_1 este egal cu:

a) $\frac{1}{2^{2021}-1}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2^{2021}+1}$ d) $\frac{1}{2021}$

20.Numărul soluțiilor reale ale inecuației $\sqrt{37+12x-3x^2}+\sqrt{8+8x-2x^2} \geq x^2-4x+15$ este:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8